687-30

Aplicación del método de mínimos cuadrados al ajuste de curvas granulométricas de áridos (1)

Traducción, adaptación y aplicaciones por **MANUEL OLAYA**
Lcdo. en Ciencias Físicas
I.E.T.c.c.

INTRODUCCION

A partir de la lectura del artículo original reseñado en la llamada (1), en el Departamento de Materiales de Construcción del I.E.T.c.c., se han comprobado algunos ajustes granulométricos de áridos obtenidos por otros métodos clásicos con los resultados que se obtienen aplicando el presente método. La buena correspondencia entre unos y otros ha sido el motivo que ha impulsado a darlo mayor difusión.

AMBITO DE APLICACION

El método sirve para optimar dosificaciones de árido que previamente se pretendan aproximar a leyes del tipo:

$$A_i = f\left[\left(\frac{d_i}{D}\right)^n\right] \text{ (Fuller, Bolomey*, Rothfuchs, Hummel, etc.)} \qquad [1]$$

donde:

A_i = (%) de árido (volumen) que pasa por el tamiz de luz d_i ;

d_i = luz del tamiz (mm);

D = tamaño máximo del árido;

n = exponente (en general fraccionario).

(1) Artículo original: "Rechnerisches Verfahren zur Sieblinienverbesserung nach der Methode der kleinsten Quadrate". Dipl. Ing. Klaus J. Bastgen. Institut für Bauforschung der RWTH Aachen. Betonwerk Fertigteil-Technik. (Mayo, 1977).

* En el caso de curvas tipo Bolomey existe un método de cálculo que manejado con soltura puede ser más cómodo que el presente.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una vez obtenidos los puntos de una curva del tipo [1], se trata de aproximar a ellos lo más posible la curva de composición obtenida a partir del análisis granulométrico del árido disponible. A estos efectos se puede pensar en el conjunto de ecuaciones siguientes:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1j}\, x_j + \ldots + a_{1n}\, x_n - c_1 = r_1 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2j}\, x_j + \ldots + a_{2n}\, x_n - c_2 = r_2 \\
\vdots \\
a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{ij}\, x_i + \ldots + a_{in}\, x_n - c_i = r_i \\
\vdots \\
a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mj}\, x_j + \ldots + a_{mn}\, x_n - c_m = r_m
\end{array}
\qquad [2]
$$

donde a_{ij} = (%) del árido en volumen del grupo granulométrico* *i*, que pasa por un determinado tamiz *j*, en un análisis granulométrico realizado previamente.

x_i = tanto por 1, en volumen, del árido que entraría en la curva a obtener;

c_i = corresponde al A_i de la expresión [1], particularizado al tipo de curva que se emplee;

r_i = residuo, tal que $\sum_{i=1}^{m} r_i$ mín. ó $\sum_{i=1}^{m} r_i^2$ = mín.

Se cumple, por otra parte, que $x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ [3]

El sistema de ecuaciones [2] se puede expresar en forma matricial:

$$A\ x - C = R \qquad [4]$$

donde:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad
C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}; \quad
R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}
$$

Si en cada una de las m ecuaciones se resta cada uno de los coeficientes que afectan a las incógnitas x_n, según [3] se llegará a una ecuación matricial:

$$\overline{A}\ \overline{x} - \overline{C} = R,$$

* Grupos granulométricos = grava, gravilla y arena

donde:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \dots & \overline{a}_{1j} & \dots & \overline{a}_{1n-1} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \dots & \overline{a}_{2j} & \dots & \overline{a}_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{i1} & \overline{a}_{i2} & \dots & \overline{a}_{ij} & \dots & \overline{a}_{in-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \dots & \overline{a}_{mj} & \dots & \overline{a}_{mn-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} - a_{1n}) & (a_{12} - a_{1n}) & \dots & (a_{1j} - a_{1n}) & \dots & (a_{1n-1} - a_{1n}) \\ (a_{21} - a_{2n}) & (a_{22} - a_{2n}) & \dots & (a_{2j} - a_{2n}) & \dots & (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{i1} - a_{in}) & (a_{i2} - a_{in}) & \dots & (a_{ij} - a_{in}) & \dots & (a_{in-1} - a_{in}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{m1} - a_{mn}) & (a_{m2} - a_{mn}) & \dots & (a_{mj} - a_{mn}) & \dots & (a_{mn-1} - a_{mn}) \end{pmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{c}_1 \\ \overline{c}_2 \\ \vdots \\ \overline{c}_i \\ \vdots \\ \overline{c}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_{1n} \\ c_2 - a_{2n} \\ \vdots \\ c_i - a_{in} \\ \vdots \\ c_m - a_{mn} \end{pmatrix} ; \; \overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \qquad [5]$$

Después de aplicar el método de mínimos cuadrados, cuya demostración para cálculo matricial se puede encontrar en [2] y [3] (conservando las referencias del artículo original), se puede reducir el sistema de ecuaciones al siguiente:

$$\begin{array}{l} [\overline{a}_1, \overline{a}_1]\, x_1 + [\overline{a}_2, \overline{a}_1]\, x_2 + \dots + [\overline{a}_j, \overline{a}_1]\, x_j + \dots + [\overline{a}_{n-1}, \overline{a}_1]\, x_{n-1} - [\overline{c}, \overline{a}_1] = 0 \\ [\overline{a}_1, \overline{a}_2]\, x_1 + [\overline{a}_2, \overline{a}_2]\, x_2 + \dots + [\overline{a}_j, \overline{a}_2]\, x_j + \dots + [\overline{a}_{n-1}, \overline{a}_2]\, x_{n-1} - [\overline{c}, \overline{a}_2] = 0 \\ \quad \vdots \\ [\overline{a}_1, \overline{a}_j]\, x_1 + [\overline{a}_2, \overline{a}_j]\, x_2 + \dots + [\overline{a}_j, \overline{a}_j]\, x_j + \dots + [\overline{a}_{n-1}, \overline{a}_j]\, x_{n-1} - [\overline{c}, \overline{a}_j] = 0 \\ \quad \vdots \\ [\overline{a}_1, \overline{a}_{n-1}]\, x_1 + [\overline{a}_2, \overline{a}_{n-1}]\, x_2 + \dots + [\overline{a}_j, \overline{a}_{n-1}]\, x_j + \dots + [\overline{a}_{n-1}, \overline{a}_{n-1}]\, x_{n-1} - [\overline{c}, \overline{a}_{n-1}] = 0 \end{array} \qquad [6]$$

tal que por ejemplo:

$$b_{12} = [\overline{a}_1, \overline{a}_2] = \overline{a}_{11}\, \overline{a}_{12} + \overline{a}_{21}\, \overline{a}_{22} + \dots + \overline{a}_{i1}\, \overline{a}_{i2} + \dots + \overline{a}_{m1}\, \overline{a}_{m2} \qquad [7]$$

El residuo medio será:

$$\overline{r} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} r_i^2}{m}}$$

A continuación figuran dos ejemplos prácticos, aplicaciones del método a curvas del tipo Fuller y Bolomey.

Los dos ejemplos tienen como base un mismo análisis granulométrico, y los resultados concuerdan bien con los obtenidos en su día por métodos clásicos. Se trata de árido "rodado".

Ejemplo 1.—Aproximación a una curva tipo Fuller.

	% de árido que pasa por cada tamiz								
	0,15	0,28	0,6	1,18	2,38	4,76	9,11	18,6	38
1. Arena 0/47 mm	3	10	51,4	70,8	86,4	100	100	100	100
2. Gravilla 2,38/18,6 mm	0	0	0	0	0,61	0,92	28,5	100	100
3. Grava 2,38/38 mm	0	0	0	0	0	0,25	4,23	59,13	100
Ordenadas de curva de Fuller	6,24	8,54	12,52	17,6	25	35,12	48,89	69,87	100

El sistema de ecuaciones [2] será:

$$\begin{aligned}
3\ x_1 & & & - 6{,}24 = r_1 \\
10\ x_1 & & & - 8{,}54 = r_2 \\
51{,}4\, x_1 & & & - 12{,}52 = r_3 \\
70{,}8\, x_1 & & & - 17{,}6 = r_4 \\
86{,}4\, x_1 & + 0{,}61\, x_2 & & - 25{,}00 = r_5 \\
100\ x_1 & + 0{,}92\, x_2 & + 0{,}25\, x_3 & - 35{,}12 = r_6 \\
100\ x_1 & + 28{,}5\ x_2 & + 4{,}23\, x_3 & - 48{,}89 = r_7 \\
100\ x_1 & + 100\ x_2 & + 59{,}13\, x_3 & - 69{,}87 = r_8 \\
100\ x_1 & + 100\ x_2 & + 100\ x_3 & - 100 = r_9
\end{aligned}$$

Restando los coeficientes a_{i3}, según [5]:

$$\begin{aligned}
3\ x_1 & & - 6{,}24 = r_1 \\
10\ x_1 & & - 8{,}54 = r_2 \\
51{,}4\ x_1 & & - 12{,}52 = r_3 \\
70{,}8\ x_1 & & - 17{,}6 = r_4 \\
86{,}4\ x_1 & + 0{,}61\, x_2 & - 25{,}00 = r_5 \\
99{,}75\, x_1 & + 0{,}67\, x_2 & - 34{,}87 = r_6 \\
95{,}77\, x_1 & + 24{,}27\, x_2 & - 44{,}66 = r_7 \\
40{,}87\, x_1 & + 40{,}87\, x_2 & - 10{,}74 = r_8 \\
0\ x_1 & + 0\ x_2 & - 0 = r_9
\end{aligned}$$

$$b_{11} = (\overline{a_1}, \overline{a_1}) = (3 \times 3) + (10 \times 10) + (51{,}4 \times 51{,}4) + (70{,}8 \times 70{,}8) + (86{,}4 \times 86{,}4) + (99{,}75 \times 99{,}75) + (95{,}77 \times 95{,}77) + (40{,}87 \times 40{,}87) = 35.930{,}86;$$

$$b_{12} = (\overline{a_1}, \overline{a_2}) = (86{,}4 \times 0{,}61) + (99{,}75 \times 0{,}67) + (95{,}77 \times 24{,}27) + (40{,}87 \times 40{,}87) = 4.114{,}23;$$

$$b_{22} = (\overline{a_2}, \overline{a_2}) = (0{,}61 \times 0{,}61) + (0{,}67 \times 0{,}67) + (24{,}27 \times 24{,}27) + (40{,}87 \times 40{,}87) = 2.260{,}19;$$

$$d_1 = (\overline{c}, \overline{a_1}) = (3 \times 6{,}24) + (10 \times 8{,}54) + (51{,}4 \times 12{,}52) + (70{,}8 \times 17{,}6) + (86{,}4 \times 25) + (99{,}75 \times 34{,}87) + (95{,}77 \times 44{,}66) + (40{,}87 \times 10{,}74) = 12.354{,}99;$$

$$d_2 = (\overline{c}, \overline{a_2}) = (0{,}61 \times 25) + (0{,}67 \times 34{,}87) + (24{,}27 \times 44{,}66) + (40{,}87 \times 10{,}74) = 1.561{,}44.$$

La expresión del sistema de ecuaciones [6] será:

$$35.930{,}86\ x_1 + 4.114{,}23\ x_2 - 12.354{,}99 = 0\,;$$

$$4.114{,}23\ x_1 + 2.260{,}19\ x_2 - 1.561{,}44 = 0\,.$$

$$x_1 = 0{,}334 \longrightarrow \text{Arena} \quad = 33{,}4\ \%$$

$$x_2 = 0{,}082 \longrightarrow \text{Gravilla} = 8{,}2\ \%$$

$$\text{Grava} \quad = 58{,}4\ \%$$

Ejemplo 2.—Aproximación a una curva tipo Bolomey.

Un hormigón con consistencia seco-plástica ($a = 10$) en:

$$y = a + (100 - a)\sqrt{\frac{d}{D}}$$

	% de árido que pasa por cada tamiz								
	0,15	0,28	0,6	1,18	2,38	4,76	9,11	18,6	38
1. Arena 0/47 mm	3	10	51,4	70,8	36,4	100	100	100	100
2. Gravilla 2,38/18,6 mm	0	0	0	0	0,61	0,92	28,5	100	100
3. Grava 2,38/38 mm	0	0	0	0	0	0,25	4,23	59,13	100
Ordenadas de curva de Bolomey	15,65	17,72	21,30	25,9	32,52	41,85	54,06	72,96	100

Aplicando [2] quedará:

$$\begin{array}{lllll}
3\ x_1 & & & - 15{,}65 & = r_1 \\
10\ x_1 & & & - 17{,}72 & = r_2 \\
51{,}4\ x_1 & & & - 21{,}30 & = r_3 \\
70{,}8\ x_1 & & & - 25{,}9 & = r_4 \\
86{,}4\ x_1 & + 0{,}61\ x_2 & & - 32{,}52 & = r_5 \\
100\ x_1 & + 0{,}92\ x_2 & + 0{,}25\ x_3 & - 41{,}85 & = r_6 \\
100\ x_1 & + 28{,}5\ x_2 & + 4{,}23\ x_3 & - 54{,}06 & = r_7 \\
100\ x_1 & + 100\ x_2 & + 59{,}13\ x_3 & - 72{,}96 & = r_8 \\
100\ x_1 & + 100\ x_2 & + 100\ x_3 & - 100 & = r_9
\end{array}$$

Restando los coeficientes a_{i3} :

$$\begin{array}{llll}
3\ x_1 & & - 15{,}65 & = r_1 \\
10\ x_1 & & - 17{,}72 & = r_2 \\
51{,}4\ x_1 & & - 21{,}30 & = r_3 \\
70{,}8\ x_1 & & - 25{,}9 & = r_4 \\
86{,}4\ x_1 & + 0{,}61\ x_2 & - 32{,}52 & = r_5 \\
99{,}75\ x_1 & + 0{,}67\ x_2 & - 41{,}60 & = r_6 \\
95{,}77\ x_1 & + 24{,}27\ x_2 & - 49{,}83 & = r_7 \\
40{,}87\ x_1 & + 40{,}87\ x_2 & - 13{,}83 & = r_8 \\
0\ x_1 & + 0\ x_2 & - 0 & = r_9
\end{array}$$

Resultarán por tanto, siguiendo los cálculos del *ejemplo* 1, los coeficientes:

$$b_{11} = (\overline{a_1}, \overline{a_1}) = 36.020,87$$

$$b_{12} = (\overline{a_1}, \overline{a_2}) = 4.114,23$$

$$b_{22} = (\overline{a_2}, \overline{a_2}) = 2.260,21$$

$$d_1 = (\overline{c}, \overline{a_1}) = 15.622,26$$

$$d_2 = (\overline{c}, \overline{a_2}) = 1.822,31$$

El sistema de ecuaciones correspondiente será:

$$36.020,87\ x_1 + 4.114,23\ x_2 - 15.622,26 = 0$$

$$4.114,23\ x_1 + 2.260\ x_2 - 1.822,31 = 0$$

$$x_1 = 0,43 \longrightarrow \text{Arena} = 43\ \%$$

$$x_2 = 0,021 \longrightarrow \text{Gravilla} = 2,1\ \%$$

$$\text{Grava} = 54,9\ \%$$