

Trabajos teóricos y experimentales sobre mecánica estadística de fractura, realizados en el IDIEM (Chile)

Theoretical and experimental investigations on fracture statistics carried out at the IDIEM (Chile)

P. KITTL, G. DIAZ y M. LEON

Departamento de Ingeniería y Ciencia de Materiales, IDIEM, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 1420, Santiago, Chile

RESUMEN

Las altas exigencias requeridas para algunas estructuras de especial responsabilidad o de muy alto coste han dado origen a una nueva disciplina que puede denominarse Ingeniería de la Fiabilidad, cuyo principal objetivo es determinar la probabilidad con que un ingenio puede verificar una exigencia.

En este trabajo se presenta una descripción, no muy detallada, de los tópicos tratados por el IDIEM, en estos últimos años, dentro de esta disciplina.

Dentro de ella está la Mecánica Estadística de Fractura, que estudia la probabilidad de que una estructura se deforme plásticamente, y la probabilidad de ocurrencia de las causas, teniendo en cuenta la fatiga de los materiales.

Se incluye un desarrollo teórico de la mecánica estadística de fractura, describiendo las funciones de riesgo específico de fractura, por medio de ecuaciones integrales, y la determinación de sus parámetros e incertezas, cuando las funciones tienen una forma analítica conocida.

Los estudios experimentales van desde cuerpos muy frágiles, como el vidrio, a otros, cuasi-frágiles, como es la pasta de cemento, a otros, que pueden deformarse plásticamente como es el caso de algunas soldaduras, extendiendo el estudio a fibrocompuestos y materiales naturales, como el granito.

SUMMARY

The high exigencies required for some structures owing to their responsibility or their high cost have originated a new discipline that can be called Reliability Engineering, which main aim is to determine the probability afforded by a machine to comply a requirement.

This work contains a not fully detailed description of the topics studied by IDEM during those last years, within this field.

Within it there are Fracture Statistics, which studies the probability for some structure to undergo plastic deformations, and the probability of the causes to occur, taken into account materials fatigue.

It also includes a theoretical development of the fracture statistics, describing the specific-risk-of-fracture functions by means of integral equations, and the determination of their parameters and their uncertainties, when the functions have a known analytical form.

Experimental researches range from the most brittle bodies, such as glass, almost brittle ones such as cement paste and to others that can admit plastic deformation, such as certain weldings, enlarging the study to fibro-composites and natural materials such as granite.

1. INTRODUCCION

Debido a que las grandes estructuras modernas, en la mayor parte de los casos, están sometidas a exigencias muy fuertes —como aquellas que deben permanecer en alta mar para la extracción de petróleo— y

1. INTRODUCTION

Large moder structures are subjected to very severe requirements in most instances, as in the case of mid-sea structures used for oil extraction, while other structures not so large are subjected to even higher requirements

aquellas otras que no son tan grandes, pero que están sometidas a exigencias mayores debido al alto costo de las estructuras, como es el caso de los vehículos espaciales en que están incluidas, se ha generado una nueva disciplina, que se puede denominar Ingeniería de la Fiabilidad. Ingeniería cuyo principal objetivo es, determinar la probabilidad con que un ingenio puede verificar una exigencia.

A esta disciplina pertenece la Mecánica Estadística de Fractura o Resistencia Probabilística de Materiales, que en inglés podría llamarse Fracture Statistics, Probabilistic Fracture, o Probabilistic Strength of Materials. Esta disciplina estudia, además, la probabilidad con que una estructura se deforme plásticamente y también está incluida la probabilidad de las causas, como es el caso de las fuerzas externas de tipo aleatorio que producen las olas o los terremotos, finalmente se debe tomar en cuenta la fatiga, elemento de juicio fundamental para la durabilidad en el tiempo.

De toda esta compleja configuración se eligió la más básica, como es la Mecánica Estadística de Fractura que quisimos desarrollar en forma completa, tanto en lo que respecta a la determinación de las funciones riesgo específico de fractura, mediante el método de las ecuaciones integrales, como en la determinación de los parámetros y sus incertezas, cuando las funciones tienen una forma analítica conocida. En la parte experimental se han estudiado desde los cuerpos más frágiles, como es el vidrio, hasta los cuasi-frágiles, como es la pasta de cemento, terminando en aquellos que se pueden deformar plásticamente, como algunas soldaduras. Tales estudios se han extendido también a los fibrocompuestos y a materiales naturales como el granito.

En lo que sigue haremos una descripción, no demasiado detallada, de los tópicos que se han estudiado en el IDIEM en estos últimos años.

2. DATOS EMPIRICOS DE LA FRACTURA FRAGIL

Si a un material sometido a un ensayo de tracción uniaxial se le va midiendo la tensión de tracción que soporta, σ , y la respectiva deformación experimentada, ϵ , y si esto se hace hasta la rotura del material, se obtiene la curva tensión-deformación del material. Esta curva puede adoptar diversas formas, las más típicas de los materiales de ingeniería se observan en la Fig. 1. En la curva A la relación entre tensión y deformación es lineal y la rotura se alcanza con bajas deformaciones en

owing to the high cost of the larger structures containing the same, as in the case of space ships. As a result of the foregoing there has been originated a new branch of science that can be denominated Reliability Engineering and whose main object it ascertaining the probability afforded by a machine, or structure, to comply with a given requirement.

This new branch includes Fracture Statistics, also called Probabilistic Fracture, or Probabilistic Strength of Materials. In addition this discipline studies the probability for some structure to undergo plastic deformation; the probability of the causes is included too, as in the instance of the aleatory external forces originating seawaves or earthquakes; besides, fatigue —a fundamental element for judging time-dependent durability— must be taken into account.

From all this complex configuration the most basic subject was selected, namely Fracture Statistics, and it has been our purpose to completely develop the same, both as regards the determination of the specific-risk-of-fracture functions using therefor the method of integral equations, and as regards the determination of the parameters and of their uncertainties when the functions have a known analytical form. Experimental investigation has ranged from the study of the most brittle bodies, such as glass, to the study of almost brittle bodies, such as cement paste, ending with bodies that admit plastic deformation, such as certain weldings. These studies have also covered fibre composites and natural materials, such as granite.

Hereinafter we are undertaking a not-too-detailed discussion of the different topics studied at the IDIEM these last years.

2. EMPIRICAL DATA OF BRITTLE FRACTURE

If a material is subjected to a uniaxial tensile test and if the tensile stress σ acting on this material as well as the corresponding strain ϵ are measured till material fracture during this test, then the stress-strain curve of this material is obtained. This curve can exhibit diverse shapes, and the most typical ones for engineering materials are shown in Figure 1. In curve A the stress-strain relationship is linear, and rupture is reached with low deformations in the plastic range; this is the basic

el rango elástico, es la característica experimental básica de los materiales frágiles. En las curvas B y C, las relaciones de tensión y deformación no son lineales, obteniéndose, además, grandes deformaciones antes de la fractura del material. Sin embargo, aún cuando existe un rango elástico, en el cual la relación es lineal, pasado cierto límite —llamado tensión de fluencia— el material inicia un proceso de deformación plástica permanente hasta la rotura. Aquellos materiales representados por la curva C se les denomina dúctiles. Entre los comportamientos extremos A y C se encuentran materiales como el hormigón, que sin ser ni frágiles ni dúctiles, admiten un poco de deformación plástica. Es de gran importancia la determinación del punto de fluencia para conocer en qué momento se pasa del régimen elástico al plástico.

En aquellos materiales representados por la curva C tal punto puede detectarse con una máquina Instron y para los representados por la curva B se puede determinar con un equipo de emisión acústica, que permite escuchar el avance de las grietas, llamado en el granito "llanto del granito".

La Mecánica Estadística de Fractura o Resistencia Probabilística de Materiales nació del hecho que en los cuerpos frágiles el fenómeno de rotura presenta un alto grado de dispersión. Para describir a este hecho experimental Weibull [1] desarrolló en 1939 la teoría estadística de fractura, tomando en cuenta que, en muestras de un mismo

experimental feature of brittle materials. In curves B and C the stress-strain relationships are not linear and, moreover, large deformations are obtained prior to material fracture. But though there is an elastic range wherein stress-strain relationship is linear, upon trespassing a certain limit called yield-point stress the material undergoes a permanent plastic deformation until rupture. Those materials represented by curve C are denominated ductile materials. Between the extreme behaviours corresponding to curves A and C, are to be found materials, such as concrete, which though neither brittle nor ductile exhibit a certain amount of plastic deformation. Yield-point determination is of great significance in order to know the moment of transition from elastic to plastic regime. For materials represented by curve C the yield-point can be detected using an Instron machine, and for curve B materials this point can be ascertained employing an acoustic emission equipment allowing to hear cracks progress, called "granite weeping" in the case of granite.

Fracture Statistics, or Probabilistic Strength of Materials, were born owing to the circumstance that rupture phenomenon presents a high degree of dispersion in brittle materials. To the end of describing this experimental fact, Weibull (1) developed the theory of Fracture Statistics in 1939 taking into account that, in samples of a given material that has been similarly fabricated, cracks randomly distributed as to orientation, size and number, are preexisting. For a given

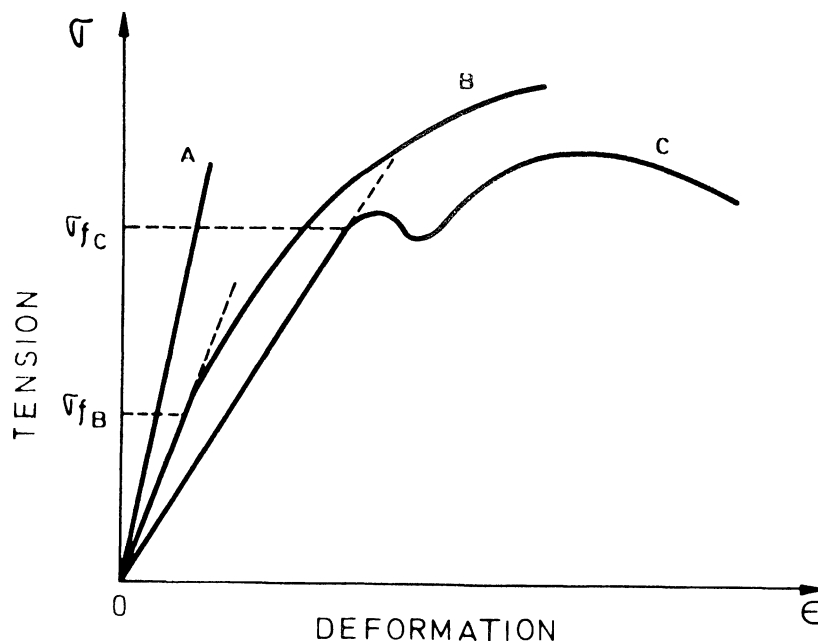


Fig. 1.—Típico diagrama tensión-deformación para materiales con diferente comportamiento de fractura. Las líneas punteadas muestran el punto donde las curvas cambian de pendiente, i.e., los puntos de fluencia f_C y f_B .

Fig. 1.—Typical stress-strain diagram for material exhibiting different fracture-behaviour. A: brittle material; B: almost-brittle material; C: ductile material. The dashed-point line allow to see the point of slope change of the curves, i.e., of the yield point σ_{fC} and σ_{fB} .

material, similarmente fabricado, preexisten grietas distribuidas aleatoriamente en orientación, tamaño y número. Para un esfuerzo dado existe una cierta probabilidad que una de tales grietas llegue a transformarse en crítica y propagarse en forma catastrófica rompiendo el material. El origen de la falla no es necesariamente en la zona de mayor esfuerzo, sino que depende del nivel del esfuerzo, del tamaño, orientación y número de grietas, por tal razón un mismo espécimen falla bajo diferentes cargas. Luego, Weibull logró determinar la probabilidad acumulativa de fractura para un material frágil sometido a un estado uniaxial variable de tensiones, lo que viene a continuación es aplicable a materiales frágiles y a aquellos que se deforman o rompen al movilizarse una o más grietas.

3. CONCEPTO DE VOLUMEN CRITICO

Sea un cuerpo de volumen V sometido a un ensayo de tracción uniaxial, y sea N el número de grietas preexistentes distribuidas aleatoriamente en V y n el número de grietas que al propagarse en una región de V hacen que el cuerpo se rompa catastrófica. Esa región de V se denomina volumen crítico, V_c . Si el número de grietas es uno y el volumen crítico coincide con el volumen del cuerpo, se trata aquí de un material frágil puro, i.e., son materiales frágiles puros aquellos en los cuales basta la propagación de una única grieta para que éste se fracture catastrófica y aquellos cuerpos frágiles que necesitan de la propagación de numerosas grietas, para fracturarse, se denominan cuasi frágiles. Entre estos últimos podemos distinguir los siguientes casos:
 i) $1 \leq n \ll N$ con V_c fijo y mucho menor que V ;
 ii) $n = 1$ con V_c variable; iii) $1 < n \ll N$ con V_c variable.

4. ECUACION FUNCIONAL DE LA MECANICA ESTADISTICA DE FRACTURA

La mecánica estadística de fractura de materiales frágiles descansa en una sola hipótesis: dividido un cuerpo en dos partes arbitrarias la probabilidad de que no se fracture el total es independiente de esta descomposición y cada una de las probabilidades de las dos partes es independiente de la otra [2]. Si consideramos un cuerpo de volumen V sometido a un estado de tensión $\sigma = \text{constante}$, la ecuación funcional que se desprende de la hipótesis básica, puede anotarse como sigue:

$$\tilde{F}_{12}(V_1 + V_2 = V) = \tilde{F}_1(V_1) \cdot \tilde{F}_2(V_2) \quad (1)$$

stress there is a certain probability that one of such cracks may become critical and propagate catastrophically, breaking the material. The origin of the failure is not necessarily located in the zone of the largest stress, but it depends rather on stress-level as well as on crack size, orientation and number; for this reason, a given specimen can fail under different loads. Then Weibull succeeded in ascertaining the cumulative probability of fracture for a brittle material subjected to a variable uniaxial state of stress. What is discussed below can be applied to brittle materials and to those undergoing deformation or fracture upon the mobilisation of one or more cracks.

3. THE CONCEPT OF THE CRITICAL VOLUME

Let us consider a body, of volume V , subjected to a uniaxial tensile test, and let us denote with N the number of the preexisting cracks randomly distributed in V , and with n the number of cracks whose propagation within some region of V originates the catastrophic fractures of the body. This region of V is denominated the critical volume V_c . If the number of cracks is 1 (i.e. one) and the critical volume coincides with body volume V , then we are dealing with a pure brittle material; thus pure brittle materials are those materials wherein the propagation of a single crack suffices to produce the catastrophic fracture thereof, while brittle materials requiring the propagation of many cracks to get fractured are denominated almost-brittle materials. We can distinguish the following cases among these last materials: i) $1 \leq n \ll N$ with V_c fixed and much smaller than V ; ii) $n = 1$ with V_c variable; iii) $1 < n \ll N$ with V_c variable.

4. FUNCTIONAL EQUATION OF FRACTURE STATISTICS

Fracture Statistics of brittle materials are based on a single hypothesis: if a body is divided into two arbitrary parts the probability for the total to get fractured is independent of such division, and each one of the probabilities of the two parts is independent of the other one [2]. If we consider a body, of volume V , subjected to a state of stress $\sigma = \text{constant}$, then the functional equation deriving from the basic hypothesis can be written as follows:

donde V_1 y V_2 son la descomposición imaginaria del volumen V en dos partes disjuntas, $\bar{F}_{12}(V_1 + V_2)$ es la probabilidad acumulativa de no fractura del cuerpo de volumen $V_1 + V_2 = V$, $\bar{F}_1(V)$ es la probabilidad acumulativa de no fractura del volumen V_1 .

Veamos una demostración intuitiva de la ecuación funcional (1), para lo cual consideremos al cuerpo de volumen $V_1 + V_2 = V$ sometido a un estado de tensiones de rotura $\{\sigma_i\}$ crecientes, con $\{\sigma_i\} \leq \sigma$. En una primera etapa del ensayo se tienen tres casos posibles, que el cuerpo se fracture sólo en el volumen V_1 , que no se fracture y que se fracture sólo en el volumen V_2 . En la segunda etapa sólo se consideran los cuerpos fracturados, en cada uno de ellos se tienen dos casos posibles, que el cuerpo se fracture en el mismo volumen que se fracturó en la primera etapa, y que se fracture en el volumen que quedó indemne en la primera etapa. Sean n_{10} el número de roturas del cuerpo fracturado en el volumen V_1 y no en el volumen V_2 , n_{01} el número de roturas del cuerpo que no se fracturó en el volumen V_1 y que sí lo hizo en el volumen V_2 , n_{1011} el número de roturas del cuerpo fracturado primero en el volumen V_1 y luego en el volumen V_2 y n_{0111} el número de roturas del cuerpo fracturado primero en el volumen V_2 y luego en el volumen V_1 , se tiene entonces:

where V_1 and V_2 correspond to the imaginary decomposition of volume V into two disjointed parts, $\bar{F}_{12}(V_1 + V_2)$ is the cumulative probability of non-fracture of the body of volume $V_1 + V_2$, $\bar{F}_1(V)$ is the cumulative probability of non-fracture of volume V_1 .

Let us see an intuitive demonstration of functional equation (1), and to this end let us consider the body of volume $V_1 + V_2 = V$ subjected to a state of increasing fracture stresses $\{\sigma_i\}$, with $\{\sigma_i\} \leq \sigma$. In a first stage of testing, three cases are possible, namely: the body fractures only in volume V_1 ; the body does not fracture; and the body fractures only in volume V_2 . In the second stage, only the fractured bodies are considered, and in each one two cases are possible: the body fractures in the same volume as in the first stage; and the body fractures in the volume not fractured in the first stage. Let n_{10} be the number of ruptures of the body fractured in volume V_1 and not in volume V_2 , n_{01} be the number of ruptures of the body fractured in volume V_2 and not in volume V_1 , n_{1011} be the number of ruptures of the body fractured first in volume V_1 and thereafter in volume V_2 , and n_{0111} the number of ruptures of the body fractured first in volume V_2 and thereafter in volume V_1 ; we have then

$$\begin{aligned} n_{1011} &= n_{01} \cdot \frac{n_{10}}{N} \alpha \\ n_{0111} &= n_{10} \cdot \frac{n_{01}}{N} \beta \end{aligned} \quad (2)$$

i.e., el número de roturas del cuerpo fracturado primero en el volumen V_1 y luego en el volumen V_2 , n_{1011} , es igual al número de roturas sólo en el volumen V_1 por el porcentaje de las que se rompieron sólo en el volumen V_2 y multiplicado por el factor α necesario considerar por el hecho de la influencia del volumen, análoga explicación merece n_{0111} y el factor β . Luego, el número total de roturas en los volúmenes V_1 y V_2 son, respectivamente:

that is to say number of ruptures of the body fractured first in volume V_1 and thereafter in volume V_2 , namely n_{1011} , is equal to the number of ruptures caused in volume V_1 multiplied by the percentage of ruptures caused only in volume V_2 and multiplied by the factor α that has to be considered owing to volume influence. A similar explanation applies to n_{0111} and to factor β . Hence the total numbers of ruptures in volumes V_1 and V_2 are, respectively:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_{10} + n_{1011} \Rightarrow n_{10} = n_1 - \frac{n_1 n_2}{N} \alpha \\ n_2 &= n_{01} + n_{0111} \Rightarrow n_{01} = n_2 - \frac{n_2 n_1}{N} \beta \\ (a + \beta) n_{01} n_{10} &= n_1 n_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que no se fracture el cuerpo en el volumen $V = V_1 + V_2$ es:

Thus the probability for the body to remain unfractured in volume $V = V_1 + V_2$ is:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{12}(V_1 + V_2 = V) &= 1 - \frac{n_{10} + n_{01}}{N} = 1 - \left(\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} - \frac{n_1 n_2}{N^2} \right) \quad (4) \\ &= \left(1 - \frac{n_1}{N} \right) \left(1 - \frac{n_2}{N} \right) \\ &= \tilde{F}_1(V_1) \cdot \tilde{F}_2(V_2) \end{aligned}$$

que es la ecuación funcional (1). Debe entenderse que la demostración descansa sobre la hipótesis $n_{01} \cdot n_{10} (\alpha + \beta) = n_1 n_2$.

which is functional equation (1). It must be understood that the demonstration is resting on the hypothesis $n_{01} \cdot n_{10} (\alpha + \beta) = n_1 n_2$.

4.1. Teorema de Unicidad

4.1. Theorem of Unicity

Se ha demostrado [3] que la función de distribución (1) es única. La probabilidad de que no se fracture un volumen muy pequeño, tendiendo a cero, es 1, i.e., $\tilde{F}_{12}(0) = \tilde{F}_1(0) = \tilde{F}_2(0) = 1$.

It has been shown [3] that the function of distribution (1) is unique. The probability for a very small volume tending toward zero to remain unfractured is equal to unity, that is to say $\tilde{F}_{12}(0) = \tilde{F}_1(0) = \tilde{F}_2(0) = 1$.

Si $V_1 = 0$:

If $V_1 = 0$:

$$\tilde{F}_{12}(V_2) = \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{F}_2(V_2) = \tilde{F}_2(V_2) \quad (5)$$

Si $V_2 = 0$:

If $V_2 = 0$:

$$\tilde{F}_{12}(V_1) = \tilde{F}_1(V_1) \cdot \tilde{F}_2(0) = \tilde{F}_1(V_1) \quad (6)$$

Si $V_1 = V_2 = V$, entonces:

If $V_1 = V_2 = V$; then:

$$\tilde{F}_{12}(V) = \tilde{F}_1(V) = \tilde{F}_2(V) = \tilde{F}(V) \quad (7)$$

4.2. Solución de la ecuación funcional

4.2. Solution of the functional equation

Lo anterior demuestra que existe una única solución que verifica la ecuación funcional (1), tal como puede verse en [2, 4, 5], con las condiciones de contorno

The foregoing show that there exists a unique solution verifying the functional equation (1), as can be seen in [2, 4, 5], with the boundary conditions

$$\tilde{F}(0) = 1 ; \quad \tilde{F}(\infty) = 0 \quad (8)$$

que son la probabilidad de que no se fracture un cuerpo de volumen muy pequeño es 1, y la probabilidad de que no se fracture un cuerpo de volumen muy grande es nula, i.e., mientras más grande es el cuerpo, mayor es la probabilidad de tener defectos que al

which are stating that the probability for a body, very small in volume, to remain unfractured is equal to unity, and that the probability for a body, very large in volume, to remain unfractured is equal to zero; in other words the larger the body the higher the

propagarse lo fracturen. Para incrementos pequeños de volumen y desarrollando \tilde{F} en serie de Taylor, se tiene:

probability thereof to present defects whose propagation would fracture the body. For small volume-increments and if we expand \tilde{F} in the form of a Taylor series we obtain:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(V + \Delta V) &= \tilde{F}(V) + \tilde{F}'(V) \cdot \Delta V \\ &= \tilde{F}(V) \cdot \tilde{F}(\Delta V)\end{aligned}\quad (9)$$

Pero:

Butt:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\Delta V) &= \tilde{F}(0 + \Delta V) = \tilde{F}(0) + \tilde{F}'(0) \cdot \Delta V \\ &= 1 + \tilde{F}'(0) \cdot \Delta V\end{aligned}\quad (10)$$

Luego, considerando la ecuación (10), la (9) queda:

Hence, considering equation (10), equation (9) becomes:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(V) \cdot \tilde{F}(\Delta V) &= \tilde{F}(V) [1 + \tilde{F}'(0) \cdot \Delta V] \\ &= \tilde{F}(V) + \tilde{F}(V) \tilde{F}'(0) \cdot \Delta V \\ &= \tilde{F}(V) + \tilde{F}'(V) \cdot \Delta V\end{aligned}\quad (11)$$

En consecuencia, reorganizando la ec. (11), queda:

Therefore, rearranging equation (11) gives:

$$\frac{\tilde{F}'(V)}{\tilde{F}(V)} = \frac{\tilde{F}'(0)}{\tilde{F}(0)} = \frac{-\phi(\sigma)}{V_0}\quad (12)$$

$$\phi(\sigma), \phi'(\sigma) > 0 ; \quad 0 \leq \sigma \leq \infty$$

donde $\phi(\sigma)$ es una función positiva y creciente de la tensión, llamada función riesgo específico de fractura, y V_0 es la unidad de volumen, el signo menos proviene de que, cuanto más grande es un cuerpo, más fácil se rompe. Integrando la ecuación diferencial (12) se obtiene:

where $\phi(\sigma)$ is a positive and increasing function of the stress, called the specific-risk-of-fracture function, and V_0 is volume unit; the minus sign is due to the fact that the larger the body the easier the fracture thereof. Integration of differential equation (12) gives:

$$\ln \tilde{F}(V) = -\frac{V}{V_0} \phi(\sigma) + C\quad (13)$$

$$\tilde{F}(V) = \exp \left\{ -\frac{V}{V_0} \phi(\sigma) + C \right\}$$

La constante C es nula ya que, $\tilde{F}(0) = 1 = e^C \Rightarrow C = 0$, por lo tanto:

Constant C is null since $\tilde{F}(0) = 1 = e^C \Rightarrow C = 0$; therefore:

$$\tilde{F}(V) = \exp \left\{ -\frac{V}{V_0} \phi(\sigma) \right\}\quad (14)$$

y, en consecuencia, la probabilidad acumulativa de fractura $F(V) = 1 - \tilde{F}(V)$ es:

and consequently the cumulative probability of fracture $F(V) = 1 - \tilde{F}(V)$ is

$$F(V) = 1 - \exp \left\{ -\frac{V}{V_0} \phi(\sigma) \right\} \quad (15)$$

4.3. Campos de tensión variables

Consideremos un cuerpo sometido a un campo de tensión variable y subdividido en volúmenes V_i , se verifica entonces que

4.3. Variable stress-field

Let us consider a body subjected to a variable stress-field and subdivided into volumes V_i ; we have

$$\tilde{F} \left(\sum_i V_i \right) = \prod_i \tilde{F}(V_i) = \exp \left\{ - \sum_i \frac{V_i}{V_0} \phi(\sigma_i) \right\} \quad (16)$$

y, en consecuencia, se obtiene generalizando (16):

and hence the generalisation of this equation (16) yields:

$$\tilde{F}(\sigma, V) = \exp \left\{ -\frac{1}{V_0} \int_V \phi[\sigma(r)] dV \right\} \quad (17)$$

y, por lo tanto, la probabilidad acumulativa de fractura para un cuerpo sometido a un campo de tensión variable, está dada por:

so that the cumulative probability of fracture for a body subjected to a variable stress-field is given by:

$$F(\sigma, V) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{V_0} \int_V \phi[\sigma(r)] dV \right\} \quad (18)$$

$$\sigma(r) \leq \sigma_f(r) \quad ; \quad |f(r)| \leq 1$$

con $f(r)$ obtenida de la teoría de la elasticidad.

where $f(r)$ is obtained through the theory of elasticity.

5. CASOS TRATADOS CON $\phi(\sigma)$ DESCONOCIDA

Con la fórmula de Weibull, ec. (18), es posible determinar la probabilidad acumulativa de fractura siempre que se conozca $\phi(\sigma)$, función riesgo específico de fractura, tanto en su forma analítica como en forma numérica. Cuando se adopta para $\phi(\sigma)$ una forma analítica conocida se realiza la integración para casos especiales y se obtienen los valores de los parámetros por una serie de experiencias. Cuando se deja a $\phi(\sigma)$ como una función incógnita, la fórmula de Weibull debe ser considerada como una ecuación integral donde $F(\sigma)$ está dada por las

5. CASES TREATED WITH $\phi(\sigma)$ UNKNOWN

Using the Weibull formula, i.e. equation (18), it is possible to determine the cumulative probability of fracture provided the specific-risk-of-fracture function is known both in its analytical and in its numerical form. When a known analytical form is adopted for $\phi(\sigma)$ then the integration is carried out for special cases, and parameters values are obtained through a series of experiments. When $\phi(\sigma)$ is considered as an unknown function the Weibull formula must be handled as an integral equation wherein $F(\sigma)$ is given

experiencias y $\sigma(r)$ por la teoría de la elasticidad. En [6, 7, 8, 9, 10] se usó el método de las ecuaciones integrales en diversos casos de flexión tanto para fragilidad volumétrica como superficial.

5.1. Fragilidad volumétrica

Sea una viga de sección rectangular de largo L , ancho b y altura h , sometida a una carga de flexión P en el centro de su luz, la ecuación integral y su solución son, respectivamente:

$$\xi_v(\sigma) = \ln \frac{1}{1 - F_v(\sigma)} = \frac{bhL}{2V_0} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \frac{d\gamma}{\gamma^2} \int_0^\gamma \phi_v(\xi) d\xi \quad (19)$$

$$\phi_v(\sigma) = \frac{2V_0}{bnL} \frac{d}{d\sigma} \left\{ \sigma \frac{d}{d\sigma} [\sigma \xi_v(\sigma)] \right\}$$

Para el caso de una viga de sección circular de radio r y largo L sometida a una carga de flexión P en el centro de su luz, la ecuación integral, que es Abeliana, y su solución son, respectivamente:

$$\xi_v(\sigma) = \frac{2Lr^2}{V_0} \int_0^L \int_0^1 \phi_v(\xi, \gamma, \sigma) \sqrt{1 - \gamma^2} d\xi d\gamma \quad (20)$$

$$\phi_v(\sigma) = \frac{V_0}{\pi L r^2} \frac{d}{d\sigma} \left[\sigma^2 \int_0^\sigma \frac{d}{d\gamma} \left\{ \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} [\gamma^2 \xi_v(\gamma)] \right\} \frac{d\gamma}{\sqrt{\sigma^2 - \gamma^2}} \right]$$

5.2. Fragilidad superficial

En el caso de fragilidad superficial la teoría de Weibull permite obtener para la probabilidad acumulativa de fractura [8, 9]:

$$F_s(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \frac{1}{S_0} \int_S \phi[\sigma(r)] dS \right\} \quad (21)$$

donde S_0 es la unidad de superficie y S es la superficie del cuerpo.

Para la misma viga anterior de sección rectangular con fragilidad superficial y

by the experiments and $\sigma(r)$ is supplied by the theory of elasticity. In [6, 7, 8, 9, 10] the method of integral equations was used in divers cases of bending, both for volume and for surface brittleness.

5.1. Volume brittleness

Let us consider a beam rectangular in cross-section and L long, b wide and h high, subjected to a bending load P applied at mid-span. Here the integral equation and its solution are, respectively:

For the case of a beam with a circular cross-section of radius r and with a longitude L , subjected to a bending load P applied at mid-span, the integral equation —which is Abelian— and its solution are, respectively:

5.2. Surface brittleness

In the case of surface brittleness the Weibull theory allows getting for the cumulative probability of fracture [8, 9]:

where S_0 is surface unit and S is body surface.

For the above-mentioned rectangular beam with surface brittleness and subjected to

sometida a flexión, la ecuación integral y su solución son, respectivamente:

bending, the integral equation and its solution are, respectively:

$$\xi_s(\sigma) = \ln \frac{1}{L - F_s(\sigma)} = \frac{hL}{S_0} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \frac{d\eta}{\eta} \int_0^\eta \phi_s(\xi) d\xi + \frac{bL}{S_0} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \phi_s(\eta) d\eta$$

$$\phi_s(\sigma) = \frac{S_0}{Lb\sigma^{1+h/b}} \int_0^\sigma \frac{d\eta}{d\eta} \left\{ \eta \frac{d}{d\eta} [\eta \xi_s(\eta)] \right\} \eta^{h/b} d\eta \quad (22)$$

Análogamente, para la viga de sección circular con fragilidad superficial y sometida a flexión, la ecuación integral, que es una de Schlömilch reducible a una de Abel, y su solución son, respectivamente:

Similarly, for the round beam with surface brittleness and subjected to bending, the integral equation —which is a Schlömilch equation reducible to an Abelian one— and its solution are, respectively:

$$\xi_s(\sigma) = \frac{4r}{S_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^{L/2} \phi_s' \left(\frac{2x\sigma \sin \alpha}{L} \right) dx d\alpha$$

$$\phi_s(\sigma) = \frac{S_0}{\pi L r} \frac{d}{d\sigma} \left\{ \sigma^2 \int_0^\sigma \frac{d\eta}{d\eta} [\xi_s(\eta)] \frac{d\eta}{\sqrt{\sigma^2 - \eta^2}} \right\} \quad (23)$$

6. PROBABILIDAD LOCAL DE FRACTURA

La localización probabilística de la fractura consiste en determinar la probabilidad acumulativa de fractura en diferentes puntos de un cuerpo [11], tal probabilidad está dada por:

6. LOCAL PROBABILITY OF FRACTURE

The probabilistic localisation of the fracture consists in determining the cumulative probability of fracture at different points of a body [11]. Such a probability is given by:

$$\frac{1}{N} \frac{d^3 n(r, \sigma)}{dV} = \frac{\phi[\sigma(r)]}{\int_V \phi[\sigma(r)] dV} \quad (24)$$

donde $d^3 n(r, \sigma)/N$ es la fracción de roturas por unidad de volumen que comienzan en el volumen dV localizado en el punto r a un esfuerzo σ , y N es el número total de roturas. En [12] se la usó para confirmar la anisotropía de una porcelana. Este concepto de probabilidad local de fractura se usó también para obtener una viga isofráctica [13], i.e., una viga con igual probabilidad de fractura a lo largo de toda la luz, en una experiencia de flexión, de una viga de sección rectangular. En un trabajo reciente [14] se discuten las bases

where $d^3 n(r, \sigma)/N$ is the fraction of ruptures per volume unit that start in volume dV located at point r under a stress σ , and N is the total number of ruptures. It was used in [12] for confirming the anisotropy of a porcelain. This concept of local probability of fracture was also used to get an isofractic beam [13], that is to say a beam exhibiting the same probability of fracture along the whole span thereof, in a bending experiment with a rectangular beam. A recent paper [14] discusses the bases of local probability of

de la probabilidad local de fractura, demostrando que cuando la fórmula (24) es dependiente de σ , la expresión correcta para $(1/N) d^3 n(r, \sigma)/dV$ es:

fracture, showing that when formula (24) depends on σ the correct expression for $(1/N) d^3 n(r, \sigma)/dV$ is:

$$\frac{1}{N} \frac{d^3 n(r, \sigma)}{dV} = \frac{1}{V_0} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{V_0} \int_V \phi[\sigma(r)] dV \right\} \frac{\phi[\sigma(r)]}{\int_V \phi[\sigma(r)] dV} \times \left\{ \int_V \frac{d}{d\sigma} \left\{ \phi[\sigma(r)] dV \right\} d\sigma \right\} \quad (25)$$

7. ESTADISTICA DETALLADA

Weibull [1] propuso para $\phi(\sigma)$ la forma siguiente:

7. DETAILED STATISTICS

Weibull [1] proposed the following form for $\phi(\sigma)$:

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_0} \right)^m & \sigma \geq \sigma_L \\ 0 & \sigma < \sigma_L \end{cases} \quad (26)$$

donde σ_0 y m son constantes que dependen del proceso de fabricación del material y σ_L es la tensión por debajo de la cual no hay fractura. La tensión media de fractura está dada por:

where σ_0 and m are constants that depend on the manufacturing process of the material, and σ_L is the stress below which there is no fracture. Mean fracture-stress is given by the following expression

$$\bar{\sigma} = \int_0^\infty \sigma \frac{dF(\sigma, V)}{d\sigma} d\sigma = \sigma_L + \sigma_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/m} \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) \quad (27)$$

donde:

where

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

es la función gamma de Euler. Luego $\bar{\sigma}$ es función de los parámetros de la función de Weibull definida en la ecuación (26). Sin embargo $\bar{\phi}$ es independiente de aquellos parámetros, ya que:

is Eulerian gamma function. Hence $\bar{\sigma}$ is a function of the parameters of the Weibull function defined in equation (26). However $\bar{\phi}$ is independent of those parameters since

$$\bar{\phi} = \int_0^\infty \phi \frac{dF(\sigma, V)}{d\sigma} d\phi = \int_0^\infty \frac{V}{V_0} \phi e^{-\frac{V}{V_0} \phi} d\phi = \frac{V_0}{V} \quad (28)$$

es sólo función del volumen del cuerpo.
Usando la variable aleatoria

is a function of body volume only. Using the
aleatory variable

$$\psi_i = \frac{V}{V_0} \phi(\sigma_i)$$

se tiene:

we get:

$$\bar{\psi} = \overline{\frac{V}{V_0} \phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^z n_i \psi_i = 1 \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^z n_i = N$$

i.e., el valor medio de ψ es 1 y el número de fracturas es una constante igual a N , donde el espacio de ψ_i se ha subdividido en z intervalos de igual tamaño, cada uno con n_i fracturas. Entonces:

i.e. the mean value of ψ is 1 and the number of fractures is a constant equal to N , where the space of ψ_i has been subdivided into z intervals equal in size and each one with n_i fractures. Then:

$$\begin{aligned} \text{Máx } W(n_1, n_2, \dots, n_z) &= \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_z!} \cdot \frac{1}{N^N} \\ \text{s.a. } \sum_{n_1, n_2, \dots, n_z} W(n_1, n_2, \dots, n_z) &= 1 \end{aligned} \quad (30)$$

o sea, maximizando la probabilidad de la configuración definida por las ecuaciones (29) se obtiene:

that is, maximising the probability of the configuration defined by equation (29) we get:

$$\left. \begin{aligned} f(\psi) &= \beta e^{-\beta \psi} \\ \bar{\psi} &= \int_0^{\infty} \psi f(\psi) d\psi = 1 = \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\psi) = e^{-\psi} \quad (31)$$

Si se usa σ como variable independiente se obtiene:

If σ is used as an independent variable we have:

$$F(\sigma, V) = \int_0^{\sigma} \frac{V}{V_0} e^{-\frac{V}{V_0} \phi(\sigma)} \phi'(\sigma) d\sigma = 1 - \exp \left\{ -\frac{V}{V_0} \phi(\sigma) \right\} \quad (32)$$

que es la fórmula de Weibull que se obtuvo en (15).

which is the Weibull formula obtained in the form of expression (15)

7.1. Dependencia del volumen

La dependencia del volumen que se aprecia en la fórmula de Weibull ha sido estudiada en pasta de cemento compactada sometida a flexión [15] y a compresión [4], en vidrio a compresión [5] y en porcelana [16]. Pero es válida sólo cuando el cuerpo falla catastróficamente al propagarse la primera grieta que se activa, o si la estadística está referida a la propagación de la primera grieta sin fractura del material. Si $\bar{\psi} = (1/N) \sum \psi_i = H(V)$ y si el cuerpo se divide arbitrariamente en dos partes disjuntas V_1 y V_2 , se tiene:

$$\bar{\psi} = \frac{V_1}{V} \bar{\psi}_1 + \frac{V_2}{V} \bar{\psi}_2 = \frac{V_1}{V} H(V_1) + \frac{V_2}{V} H(V_2)$$

$$\bar{\psi} = H(V_1 + V_2) \tag{33}$$

ecuación funcional cuya única solución es una constante que debe ser 1 debido a la condición $\beta = 1$ en (31).

7.2. Cuerpos cuasi-frágiles

En la definición de volumen crítico se presentan tres casos de cuerpos cuasi-frágiles. Si $n = 1$ y V_c es variable:

$$\left\{ \begin{aligned} F(\sigma) &= \int_0^{\infty} F(\sigma, V_c) f(V_c) dV = \frac{\phi(\sigma)/\gamma}{1 + \phi(\sigma)/\gamma} \\ \gamma &= \frac{\bar{V}_c}{V_0}, \quad f(V_c) = \frac{1}{V_c} e^{-\frac{V_c}{V_0}} \end{aligned} \right. \tag{34}$$

Si $n \ll N$ y $V_c \ll V$ fijo, se tiene:

$$\left\{ \begin{aligned} F(\sigma) &= 1 - \exp \left\{ - \frac{V_c^2}{2V_0 \Delta V} \phi(\sigma) \right\} \\ n &= \frac{V_c}{\Delta V} \end{aligned} \right. \tag{35}$$

7.1. Dependence on volume

Volumen dependence noticeable in the Weibull formula has been studied in compacted cement-paste subjected to bending [15] and to compression [4], as well as in glass under compression [5] and in porcelain [16]. But this volume dependence is valid only when the body is failing catastrophically as a result of the propagation of the first crack activated, or if the statistics are referred to the propagation of the first crack without any fracture of the material. If $\bar{\psi} = (1/N) \sum \psi_i = H(V)$ and if the body is arbitrarily divided into two disjointed parts V_1 and V_2 we have:

which is a functional equation whose unique solution is a constant that must be 1 in view of the condition $\beta = 1$ in (31).

7.2. Almost-brittle bodies

The definition of the critical volume comprises three cases of almost-brittle bodies. If $n = 1$ and V_c is variable:

If $n \ll N$ and $V_c \ll V$ fixed, we have:

Si $1 < n \ll N$ y V_c variable, se tiene:

If $1 < n \ll N$ and V_c is variable we have:

$$\left\{ \begin{aligned} F(\sigma) &= \int_0^{\infty} \left[1 - \exp \left\{ - \frac{V_c^2}{2V_0 \Delta V} \phi(\sigma) \right\} \right] e^{-\frac{V_c}{\bar{V}_c}} \frac{dV_c}{\bar{V}_c} = \\ &= 1 - \frac{e^{-\frac{\Delta V V_0}{2\phi(\sigma)\bar{V}_c^2}}}{\bar{V}_c} \sqrt{\frac{2\Delta V V_0}{\phi(\sigma)}} \int_0^{\infty} e^{-\gamma^2} d\gamma \sqrt{\frac{\Delta V V_0}{2\phi(\sigma)\bar{V}_c^2}} \end{aligned} \right. \quad (36)$$

Por lo tanto, las fórmulas (34), (35) y (36) dan cuenta de la probabilidad acumulativa de fractura para los tres casos de cuerpos cuasi-frágiles.

Hence formulas (34), (35) and (36) supply the cumulative probability of fracture for the three cases of almost-brittle bodies.

7.3. Estimación de los parámetros

Los parámetros de Weibull se han estimado [17, 18] usando los métodos de máxima verosimilitud, momentos y mínimo chi-cuadrado.

Los estimadores de máxima verosimilitud de m , σ_0 y σ_L se obtienen a partir de:

7.3. Evaluation of the parameters

Weibull parameters have been evaluated [17, 18] using the methods of maximum likelihood, of moments, and of minimum chi-squared.

The estimators of maximum likelihood of m , σ_0 and σ_L are obtained from

$$\left\{ \begin{aligned} L(m, \sigma_0, \sigma_L) &= \prod_i f(\sigma_i; m, \sigma_0, \sigma_L) \\ \frac{\partial L}{\partial m} &= 0 ; \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma_0} = 0 ; \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma_L} = 0 \end{aligned} \right. \quad (37)$$

y las varianzas y covarianzas invirtiendo la matriz R de Fisher:

and the variances and covariances are obtained inverting the Fisher R -matrix:

$$\left\{ \begin{aligned} \{R\} &= [r_{ij}] = - E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\sigma; m, \sigma_0, \sigma_L)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} \\ \{\theta_i\} &= \{m, \sigma_0, \sigma_L\} \end{aligned} \right. \quad (38)$$

De acuerdo al método de estimación de momentos, el momento de primer orden que corresponde al valor medio y el de segundo orden correspondiente a la varianza están dados, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \mu_1 = \int_{\sigma_L}^{\infty} \sigma f(\sigma) d\sigma = \sigma_L + \sigma_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{1/m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \\ \mu_2 = \int_{\sigma_L}^{\infty} (\sigma - \mu_1)^2 f(\sigma) d\sigma = \sigma_0^2 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/m} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right\} \end{cases} \quad (39)$$

las ecuaciones de momentos se obtienen igualando los momentos de primer y segundo orden con las medias y varianzas experimentales, respectivamente, y la tercera condición consiste en usar m obtenido por mínimos cuadrados, y así se determinan los estimadores de momentos para m , σ_0 y σ_L .

El mínimo chi-cuadrado es un estimador asintóticamente eficiente, dado por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{[K_i - n F_i(\sigma_i; m; \sigma_0; \sigma_L)]^2}{n F_i(\sigma_i; m; \sigma_0; \sigma_L)} \quad (40)$$

donde la población de fracturas se ha clasificado en r clases, cada una de K_i elementos, n es el número de ensayos, tal que $\sum_{i=1}^r K_i = n$ y F_i es la probabilidad acumulativa de fractura en la clase i ; minimizando la ecuación (40) con respecto a cada parámetro se obtiene una estimación del mismo. Las experiencias se han hecho con pasta de cemento compactada sometida a flexión [17] y con cilindros de vidrio rotos a compresión [5].

8. LAS INTERFASAS Y LOS COMPUESTOS

Se extendió la Mecánica Estadística de Fractura a interfaces frágiles al tratar el caso de una fibra de cobre embebida en una matriz de cemento [19], el caso más general se resolvió en [10]. Se analizó también el caso particular de una soldadura Cu/Sn donde el

In accordance with the method of evaluation of moments, the first-order moment corresponding to the mean value, and the second-order moment corresponding to the variance, are given by the following expressions, respectively:

The equations of moments are obtained by establishing the equality between first-order and second-order moments, on the one hand, and experimental averages and variances, respectively; and the third condition consists in using m obtained through least squares, and the estimators of moments for m , σ_0 and σ_L are determined in this way.

The minimum chi-squared is an estimator asymptotically efficient, given by the following expression:

where the population of fractures has been classified into r classes of which each one comprises K_i elements, n is the number of tests so that $\sum_{i=1}^r K_i = n$, and F_i is the cumulative probability of fracture in class i ; the minimisation of equation (40) with respect to every parameter supplies an evaluation thereof. The experiments have been conducted using compacted cement-paste subjected to bending [17], as well as employing glass cylinders broken through compression [5].

8. INTERFACES AND COMPOSITES

Fracture Statistics have been extended to the investigation of brittle interfaces by treating the case of a copper fibre embedded in a cement matrix [19], and the more general case was solved in [10]. There was also analysed the particular case of a Cu/Sn weld whose

espesor de ésta era suficientemente pequeño para que el esfuerzo de fluencia equivaliese a la rotura, teniendo así, la interfase soldada, fractura frágil [20]. Analisis de confiabilidad y control de calidad de cordones de soldadura son particularmente importantes en estructuras a las cuales se les exige una elevada probabilidad de supervivencia y que son de un alto costo, como es el caso de las plataformas petroleras de alta mar, los estanques con productos radiactivos en centrales nucleares a los grandes buques que podrían zozobrar por fractura frágil de una soldadura.

El tratamiento general de los fibro-compuestos se abordó [21] usando una estadística Weibulliana para interfases frágiles, analizando allí algunos casos especiales de distribución del esfuerzo de corte en la interfase fibra-matriz y considerando fibras frágiles y dúctiles embebidas en matrices frágiles.

AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen al Profesor A. Lamana, Director del IDIEM, por su constante estímulo y aliento a esta nueva disciplina, y al Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico por el financiamiento otorgado a través del proyecto N.º 0132/84.

thickness was reduced in a sufficient way so that the yield-point stress amounted to rupture, and thus the welded interface exhibited a brittle fracture [20]. Reliability and control analyses of welding beads are particularly important in high-cost structures that are to afford a high probability of survival, as in the instances of mid-sea oil platforms, of radioactive-products reservoirs in nuclear plants, and of large ships that might suffer wreckage as a result of some brittle fracture in welding.

The general treatment of fibre composites was undertaken [21] using Weibullian statistics for brittle interfaces, analysing then some special cases of shear-stress distribution in the fibre-matrix interface, and considering brittle and ductile fibres embedded in brittle matrices.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are grateful to Professor Atilano Lamana, Director of the IDIEM, for his constant stimulus and encouragement, to the "Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico" for the funds granted through Project N.º 0132/84, and to Raymond Toledo for his assistance in the redaction.

REFERENCIAS

- [1] WEIBULL, W.: A Statistical Theory of the Strength of Materials. Ing. Vetenskaps Akad. Handl., 151 (1939) 1-45.
- [2] KITTL, P.: Sobre la Teoría Estadística de la Fractura de Cuerpos Frágiles. I. Deducción de la Fórmula de Wibull. Bol. Soc. Esp. Ceram. Vidr., 19 (1980) 407-409.
- [3] KITT, P.: Análisis of the Weibull Distribution Function. J. Appl. Mech., 51 (1984) 221-222.
- [4] KITTL, P. and ALDUNATE, R.: Compression Fracture Statistics of Compact Cement Cylinders. J. Mater. Sci., 18 (1983) 2.947-2.950.
- [5] KITTL, P. LEON, M. and CAMILO, G. M.: Fracture Statistics of Glass Cylinders Broken by Compression. In Advances in Fracture Research, Pergamon Press, Oxford, 4 (1985) 2.743-2.750.
- [6] KITTL, P.: Transformation of a Flexural Stress Weibull's Diagram into a Tractional One. Res Mech., 1 (1980) 161-165.
- [7] KITTL, P.: Sobre la Teoría Estadística de la Fractura de Cuerpos Frágiles. II. El Método de las Ecuaciones Integrales. Bol. Soc. Esp. Ceram. Vidr., 21 (1981) 235-237.
- [8] KITTL, P.: Fracture Statistics of Surface Brittle Materials under Flexure. J. Mater. Sci. Lett., 1 (1982) 413-415.
- [9] KITTL, P. and DIAZ, G.: Integral Equations in Fracture Statistics of Round Beams of Brittle Materials. J. Mater. Sci. Lett., 3 (1984) 229-231.
- [10] KITTL, P.: Volume, Surface and Interface Fracture Statistics of Brittle Materials under Flexure. Res Mech., 9 (1983) 73-86.
- [11] KITTL, P. and CAMILO, G. M.: Local Probability of Failure in Statistical Theory of Brittle Fracture. Res. Mech. Lett., 1 (1981) 115-118.
- [12] KITTL, P. and CAMILO, G. M.: Local and Cumulative Probability of Failure in an Anisotropic Porcelain. Res Mech., 6 (1983) 127-130.

- [13] KITTL, P.: Isofract Three Points Beam in the Weibull's Statistical Theory of Failure. Latin. Am. J. Metall. Mater., 1 (1981) 82-83.
- [14] KITTL, P.: Comments on "Relation Between Defect Position in the Bending Test and the Strength Variance". J. Mater. Sci. Lett., 4 (1985) 597-599.
- [15] KITTL, P. and GÜNTHER, O.: Volume Size Fracture Statistics of Compacted Cement Paste. Res Mech. Lett., 1 (1981) 145-148.
- [16] KITTL, P., CASTRO, J. H. C., KNAPP, W. J. and CAMILO, G. M.: The X^2 Proof for Weibull's Distribution and the Anisotropy of an Electrical Porcelain. Latin. Am. J. Metall. Mater., 2 (1982) 76-77.
- [17] LEON, M. and KITTL, P.: On the Estimation of Weibull's Parameters in Brittle Materials, J. Mater. Sci., 20 (1985). En publicación.
- [18] KITTL, P. and GÜNTHER, O.: Comments on "On Estimating the Weibull Modulus for a Brittle Material". J. Mater. Sci., 17 (1982) 922-923.
- [19] KITTL, P. and GALLEGUILLOS, E.: Statistical Analysis of Decohesion in a Cu Wire/Cement Interface, Res. Mech. Lett., 1 (1981) 445-449.
- [20] KITTL, P., BAEZA, J. and CRISOSTOMO, J.: Fracture Statistics of a Brittle Welding. Res. Mech., 12 (1984) 275-282.
- [21] KITTL, P. and DIAZ, G.: Fracture Statistics of Pull-out of a Brittle Composite and a Short-fibre Composite. Res Mech., 13 (1985) 43-54.

* * *

publicación del i.e.t.c.c.

<p>Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento</p> <p>Consejo Superior de Investigaciones Científicas</p>	<p>ALOJAMIENTO Y TECNOLOGIA: ¿INDUSTRIALIZACION ABIERTA?</p> <p>Julián Salas Serrano</p> 	<p>SUMARIO:</p> <p>Prólogo Prof. G. Ciribini.</p> <p>Introducción</p> <p>Capítulo 1.—La industrialización en las proclamas y manifiestos de arquitectura.</p> <p>Capítulo 2.—¿Réquiem por la construcción industrializada?</p> <p>Capítulo 3.—Algunos conceptos básicos.</p> <p>Capítulo 4.—¿Proyecto tradicional, construcción industrializada?</p> <p>Capítulo 5.—Componentes.</p> <p>Capítulo 6.—La coordinación dimensional hoy.</p> <p>Capítulo 7.—Flexibilidad, intercambiabilidad y catálogos.</p> <p>Capítulo 8.—Industrialización, normativa y calidad.</p> <p>Capítulo 9.—Reflexiones finales.</p> <p>publicación del INSTITUTO EDUARDO TORROJA</p>
<p>ALOJAMIENTO Y TECNOLOGIA: ¿INDUSTRIALIZACION ABIERTA?</p> <p>JULIAN SALAS, ING. IND. (I.E.T.c.c.)</p> <p>Un volumen de 160 páginas, 109 figuras y 16 tablas. Tamaño 240 × 168 mm. Encuadernado en rústica. Precios: España, 1.200 ptas; extranjero, 17 \$ USA.</p>		